

Zur Einfach- und Mehrfachstreuung geladener Teilchen

Von E. KEIL, E. ZEITLER und W. ZINN

Aus dem Physikalischen Institut der Universität Würzburg
(Z. Naturforschg. 15 a, 1031—1038 [1960]; eingegangen am 29. August 1960)

Die auf das WENTZELsche Verfahren zurückgehenden Ansätze von MOLIÈRE werden für das Gebiet der Einfach- und Mehrfachstreuung (mittlere Stoßzahlen von 0 bis 20) ausgewertet.

Für sehr kleine Stoßzahlen können die Winkelverteilungen direkt nach dem statistischen Verfahren von WENTZEL berechnet werden, da der Anteil der genau zweifach gestreuten Teilchen sich noch berechnen läßt und der Anteil der drei- und mehrfach gestreuten Teilchen vernachlässigbar ist.

Für Stoßzahlen zwischen 1 und 20 wird eine für die Durchführung der Auswertung auf einer elektronischen Rechenmaschine besonders geeignete Approximation für ganze Stoßzahlen benutzt.

Die Ergebnisse sind in drei Tabellen zusammengestellt, aus denen man die Winkelverteilungen, die integrierten Winkelverteilungen und die über die Schichtdicke gemittelten Winkelverteilungen für mittlere Stoßzahlen zwischen 0 und 20 entnehmen kann.

Durchlaufen geladene Teilchen eine Streufole, werden sie durch elastische Streuung aus ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt und erscheinen unter einem Winkel Θ , der im allgemeinen aus mehreren Einzelablenkungen resultiert. Die mittlere Zahl der Einzelablenkungen in der Schicht, die mittlere Stoßzahl m , ist der Schichtdicke t , der Zahl der Streuzentren N in der Volumeneinheit und dem totalen Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung σ proportional. Bei der theoretischen Behandlung der elastischen Streuung unterscheidet man drei Gebiete: Einfachstreuung ($m \ll 1$), Vielfachstreuung ($m \gg 1$) und das dazwischenliegende Gebiet der Mehrfachstreuung.

Im Falle der Einfachstreuung ist die Winkelverteilung durch den differentiellen Streuwirkungsquerschnitt gegeben.

Die Mehrfach- und Vielfachstreuung wurde theoretisch erstmals von WENTZEL¹ behandelt. Über die weiteren seitdem erschienenen Arbeiten kann auf zusammenfassende Darstellungen verwiesen werden^{2, 3}. Während für mittlere Stoßzahlen $m > 20$ die Winkelverteilung nach MOLIÈRE analytisch beschrieben werden kann⁴, ist man bei Mehrfachstreuung auf numerische Methoden angewiesen. Das aus der Literatur^{5, 6} zu entnehmende Zahlenmaterial ist jedoch nicht ausreichend, um die besonders für Streukorrekturen wichtige Abhängigkeit der Winkelverteilung von der Schichtdicke zuverlässig darzustellen.

Durch die vorliegende Arbeit soll das Gebiet der Mehrfachstreuung von der Einfachstreuung bis zum Gültigkeitsbereich der MOLIÈRESchen Streuformel numerisch erschöpfend behandelt werden.

1. Allgemeine Formulierung der Lösung

Finden beim Durchlaufen einer Materieschicht im Mittel m Streueignisse statt, so gibt

$$W_n(m) = m^n (n!)^{-1} \exp(-m)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß ein Teilchen genau n -mal gestreut wird. $f_n(\Theta)$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß es nach n Streueignissen unter dem Winkel Θ erscheint. Die resultierende Winkelverteilung kann dann für kleine Winkel ($\sin \Theta \approx \Theta$) offenbar durch folgende Summe beschrieben werden:

$$F(m, \Theta) \Theta d\Theta = \Theta d\Theta \sum_{n=0}^{\infty} W_n(m) f_n(\Theta). \quad (1)$$

Idealisiert man die Winkelverteilung der einfallenden Teilchen $f_0(\Theta)$ als zweidimensionale DIRACsche δ_2 -Funktion, so erhält man die Verteilung der genau n -fach gestreuten Teilchen durch Faltung der Verteilung der $(n-1)$ -fach gestreuten mit der der einfach gestreuten Teilchen:

$$f_n(\Theta) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\alpha=0}^{\infty} f_{n-1}(\vec{\Theta} - \vec{\alpha}) f_1(\vec{\alpha}) \alpha d\alpha d\varphi / 2\pi. \quad (2)$$

¹ G. WENTZEL, Ann. Phys., Lpz. 69, 335 [1922].

² H. A. BETHE u. J. ASHKIN in: Experimental Nuclear Physics, Vol. I, Verlag Wiley, New York 1953.

³ R. D. BIRKHOFF in: Hdb. d. Phys., Bd. XXXIV, Springer-Verlag, Berlin 1958.

⁴ G. MOLIÈRE, Z. Naturforschg. 3 a, 78 [1948].

⁵ S. LEISEGANG, Z. Phys. 132, 183 [1952].

⁶ F. LENZ, Z. Naturforschg. 9 a, 185 [1954].



Die Wahrscheinlichkeit $f_1(\Theta)$ ist das Verhältnis des differentiellen zum totalen Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung:

$$f_1(\Theta) \Theta d\Theta = \frac{d\sigma}{\Theta d\Theta} \frac{1}{\sigma} \Theta d\Theta, \quad (3)$$

die folgendermaßen normiert sein soll:

$$\int_0^\infty f_1(\Theta) \Theta d\Theta = 1. \quad (4)$$

Für die Mehrfach- und Vielfachstreuung in kleine Winkel läßt sich nach MOLIERE⁷ der differentielle Wirkungsquerschnitt auf folgende einfache Form bringen:

$$\frac{d\sigma}{2\pi \Theta d\Theta} = \left(\frac{2Zeze}{pv} \right)^2 (\Theta^2 + \Theta_a^2)^{-2} \quad (5)$$

Ze Ladung des Streuzentrums, ze Ladung des gestreuten Teilchens (e elektrische Elementarladung), p Impuls des gestreuten Teilchens.

Die mittlere Stoßzahl wird dann

$$m = N t \sigma = 4\pi N t (Zeze/pv \Theta_a)^2 \quad (6)$$

und die Wahrscheinlichkeit $f_1(\Theta)$ wegen (3):

$$\begin{aligned} f_1(\Theta) \Theta d\Theta &= 2[1 + \Theta^2/\Theta_a^2]^{-2} \Theta d\Theta/\Theta_a^2 \\ &= 2(1 + \vartheta^2)^{-2} \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \quad (7)$$

Es ist zweckmäßig, alle weiteren Betrachtungen im reduzierten Winkel $\vartheta = \Theta/\Theta_a$ durchzuführen. Der Abschirmwinkel Θ_a beschreibt die Abschirmung des Atomkernfeldes durch die Elektronenhülle ($a = \text{THOMAS-FERMI-Atomradius} = 0,466 \cdot 10^{-8} Z^{-1/3} \text{ cm}$):

$$\Theta_a = \Theta_0 M_a; \quad \Theta_0 = h/pa;$$

$$M_a^2 = 1,13 + 3,76 \alpha^2; \quad \alpha = Zz/137\beta. \quad (8)$$

Abschirmwinkel Θ_a und mittlere Stoßzahl m enthalten alle experimentellen Parameter.

M_a ist nach MOLIERE⁷ eine Korrektur an dem in BORNScher Näherung berechneten Abschirmwinkel Θ_0 . Im Gebiet der Vielfachstreuung wurde Θ_a durch Messungen^{8,9} bestätigt. Untersuchungen von LEISEGANG⁵ an dünnen Goldfolien zeigten jedoch, daß im Bereich der Mehrfachstreuung die mit Θ_a und (6) berechneten mittleren Stoßzahlen um nahezu eine Größenordnung von den aus der Messung ermittelten Werten abweichen, während die mit Θ_0 berech-

neten Werte gut mit den gemessenen übereinstimmen.

Zum praktischen Gebrauch der Tab. 1 bis 3 muß man die tatsächlich im Experiment vorhandenen Werte von m und Θ_a kennen. Sie lassen sich auf folgende Weise experimentell bestimmen⁶:

Kann man den einfallenden Teilchenstrahl durch die δ_2 -Funktion beschreiben, so erhält man wegen der Normierung der Winkelverteilungen:

$$1 = e^{-m} + \hat{G}(m, 0),$$

$$m = -\ln[1 - \hat{G}(m, 0)]. \quad (9)$$

$\hat{G}(m, 0)$ ist nach (28) der gestreute, e^{-m} der ungestreute Bruchteil des auf 1 normierten einfallenden Teilchenstroms. Hat man $\hat{G}(m, 0)$ experimentell bestimmt, so läßt sich nach (9) die mittlere Stoßzahl und aus (6) der Abschirmwinkel Θ_a berechnen.

Ist der einfallende Teilchenstrahl eine auf 1 normierte Balkenfunktion

$$I(\gamma) = \begin{cases} 2/\gamma_H^2 & \text{für } \gamma \leq \gamma_H, \\ 0 & \text{für } \gamma > \gamma_H, \end{cases} \quad \gamma_H = \Theta_H/\Theta_a, \quad (10)$$

und ist $F(m, \gamma)$ die Winkelverteilung (1) bei einfallendem δ_2 -Strahl, dann hat die durch Faltung von $F(m, \gamma)$ mit $I(\gamma)$ resultierende Winkelverteilung $\Phi(m, \vartheta)$ bei $\vartheta = 0$ den Wert

$$\Phi(m, 0) = \int_0^\infty I(\gamma) F(m, \gamma) \gamma d\gamma = I(0) \int_0^{\gamma_H} F(m, \gamma) \gamma d\gamma \quad (11)$$

oder mit (28)

$$V = \Phi(0)/I(0) = 1 - \hat{G}(m, \gamma_H). \quad (12)$$

V läßt sich experimentell leicht bestimmen, indem man den Teilchenstrom in Vorwärtsrichtung mit und ohne Streufolie mißt; $\hat{G}(m, \gamma)$ ist tabelliert. Man bestimmt nun m und Θ_a , indem man in Tab. 2 dasjenige Wertepaar m und γ_H aufsucht, für das $\hat{G}(m, \gamma_H) = 1 - V$ gilt und das außerdem mit $\Theta_a = \Theta_H/\gamma_H$ Gl. (6) erfüllt.

2. Auswertung

2.1. Auswertung für sehr kleine Stoßzahlen

Für sehr kleine Stoßzahlen $m < 0,6$ kann man die Summe (1) direkt auswerten, da man mit drei Gliedern bereits eine hinreichende Approximation von $F(m, \vartheta)$ erhält. Dieses Verfahren ist möglich, da sich die Verteilung der genau zweifach gestreuten

⁷ G. MOLIERE, Z. Naturforschg. **2a**, 133 [1947].

⁸ A. O. HANSON, L. H. LANZL, E. M. LYMAN u. M. B. SCOTT, Phys. Rev. **84**, 634 [1951].

⁹ O. KNECHT u. W. BOTHE, Z. Naturforschg. **8a**, 805 [1953].

Teilchen $f_2(\vartheta)$ durch Ausführung der räumlichen Faltung im Oberbereich noch berechnen läßt:

$$f_2(\vartheta) = \begin{cases} \frac{4}{\vartheta^4(4+\vartheta^2)^3} \left[\vartheta^2(\vartheta^4 + 2\vartheta^2 - 8) + (1 + \vartheta^2) \sqrt{4\vartheta^2 + \vartheta^4} \ln \frac{(\vartheta^4 + 4\vartheta^2 + 2) + (2 + \vartheta^2) \sqrt{4\vartheta^2 + \vartheta^4}}{(\vartheta^4 + 4\vartheta^2 + 2) - (2 + \vartheta^2) \sqrt{4\vartheta^2 + \vartheta^4}} \right] & \text{für } \vartheta > 0, \\ \frac{2}{3} & \text{für } \vartheta = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Für $n > 2$ bleiben die Funktionen $f_n(\vartheta)$ allerdings auch bei diesem Verfahren wegen mathematischer Schwierigkeiten unzugänglich.

Der durch die Vernachlässigung der höheren Glieder entstehende Fehler läßt sich wie folgt abschätzen: Wegen $f_n(0) < f_2(0)$ und $f_n(\vartheta) < f_n(0)$ folgt

$$f_n(\vartheta) < f_2(0) = 2/3. \quad (14)$$

Daher wird der Abbruchfehler

$$\Delta F^*(m, \vartheta) = \sum_{n=3}^{\infty} W_n(m) f_n(\vartheta) < \frac{2}{3} [1 - e^{-m}(1 + m + \frac{1}{2}m^2)] \quad (15)$$

(das Zeichen * kennzeichnet im folgenden stets approximierten Funktionen). Bei $m = 0,6$ und $\vartheta = 0$ ergibt sich ein Fehler von 2%.

2.2. Auswertung für ganze Stoßzahlen

Mit Hilfe der FOURIER-Transformation kann man (1) durch ein Integral darstellen⁴⁻⁶. Es ergibt sich:

$$F(m, \vartheta) \vartheta d\vartheta = \vartheta d\vartheta \int_0^{\infty} \tilde{F}(y)^m J_0(\vartheta y) y dy. \quad (16)$$

Mit der Einzelstreuwahrscheinlichkeit (7) folgt die FOURIER-Transformierte:

$$\tilde{F}(y) = \exp\{y K_1(y) - 1\}. \quad (17)$$

Dabei ist $J_0(\vartheta y)$ die BESSEL-Funktion nullter Ordnung und $K_1(y)$ die modifizierte HANKEL-Funktion $K_1(y) = -\pi/2 H_1^{(1)}(iy)$.

Da sich das Integral wegen des komplizierten Integranden nicht direkt berechnen läßt, muß man es numerisch auswerten⁶ oder den Integranden geeignet approximieren^{4,5}.

Die Auswertung des Integrals für das Gebiet der Mehrfachstreuung läßt sich auf einer elektronischen Rechenmaschine am zweckmäßigsten mit einer von LEISEGANG⁵ vorgeschlagenen Approximation durchführen. Danach kann $\tilde{F}(y)$ durch folgende Summe approximiert werden:

$$\tilde{F}^*(y) = e^{-1}(1 + b_1 e^{-c_1 y} + b_2 e^{-c_2 y}). \quad (18)$$

Damit erhält man für (16)

$$F^*(m, \vartheta) \vartheta d\vartheta = \vartheta d\vartheta e^{-m} \int_0^{\infty} (1 + b_1 e^{-c_1 y} + b_2 e^{-c_2 y})^m J_0(\vartheta y) y dy. \quad (19)$$

Beschränkt man sich auf ganzzahlige m , so läßt sich das unter dem Integral stehende Trinomen als folgende Doppelsumme schreiben:

$$(1 + b_1 e^{-c_1 y} + b_2 e^{-c_2 y})^m = \sum_{\lambda=0}^m \binom{m}{\lambda} b_1^{\lambda} e^{-\lambda c_1 y} \sum_{\mu=0}^{m-\lambda} \binom{m-\lambda}{\mu} b_2^{\mu} e^{-\mu c_2 y}. \quad (20)$$

Wegen
$$\int_0^{\infty} e^{-q y} J_0(\vartheta y) y dy = \begin{cases} \frac{q}{(q^2 + \vartheta^2)^{3/2}} & \text{für } q \neq 0, \\ \delta_2(\vartheta) & \text{für } q = 0, \end{cases} \quad (21)$$

wird das Integral (19) analytisch auswertbar und man erhält die Winkelverteilung in Form der Doppelsumme:

$$F^*(m, \vartheta) \vartheta d\vartheta = \vartheta d\vartheta \sum_{\lambda=0}^m \sum_{\mu=0}^{m-\lambda} \binom{m}{\lambda} \binom{m-\lambda}{\mu} b_1^{\lambda} b_2^{\mu} (c_1 \lambda + c_2 \mu) [(c_1 \lambda + c_2 \mu)^2 + \vartheta^2]^{-3/2} e^{-m}. \quad (22)$$

Eine Approximation $\tilde{F}^*(y)$, die nirgends mehr als $2 \cdot 10^{-3}$ von der Funktion $\tilde{F}(y)$ abweicht, an den Stellen $y = 0$ und $y = \infty$ mit ihr übereinstimmt und eine normierte Winkelverteilung $F^*(m, \vartheta)$ ergibt,

bekommt man mit folgenden Konstanten:

$$\begin{aligned} b_1 &= 2,10667, & c_1 &= 0,935, \\ b_2 &= -0,388388, & c_2 &= 5,000. \end{aligned}$$

Damit wurde die Doppelsumme (22) auf der elektronischen Rechenmaschine IBM 650 des Instituts für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt ausgewertet. Die Indexkombination $(\mu, \lambda) = (0, 0)$ wurde ausgeschlossen. Sie ergibt einen für $\vartheta = 0$ unbestimmten und für $\vartheta \neq 0$ verschwindenden Ausdruck, entspricht dem ersten Glied des Trinomens (18) und läßt sich nach (21) durch die zweidimensionale DIRACsche δ_2 -Funktion beschreiben. Physikalisch stellt sie nach (1) und (2) den Anteil der ungestreuten Teilchen $W_0(m) \cdot f_0(\vartheta) = e^{-m} \delta_2(\vartheta)$ dar. Gerechnet wurde also nur die Winkelverteilung der gestreuten Teilchen

$$G^*(m, \vartheta) = F^*(m, \vartheta) - e^{-m} \delta_2(\vartheta). \quad (23)$$

Der durch die Approximation $\tilde{F}^*(y)$ entstehende Fehler läßt sich wie folgt abschätzen:

Ist $\Delta = \tilde{F}(y) - \tilde{F}^*(y)$, so wird der Fehler des Integranden für die mittlere Stoßzahl m :

$$\Delta_m = \tilde{F}^m - \tilde{F}^{*m} \approx m \cdot \Delta \cdot \tilde{F}^{*m-1}. \quad (24)$$

Der Fehler der Winkelverteilung wird damit:

$$\Delta F^*(m, \vartheta) = m \int_0^\infty \Delta \cdot \tilde{F}^*(y)^{m-1} J_0(\vartheta y) y dy. \quad (25)$$

Er läßt sich nach oben abschätzen, indem man $\Delta_{\max} = 2 \cdot 10^{-3}$ vor das Integral zieht und (16) berücksichtigt:

$$\Delta F^*(m, \vartheta) = m \Delta_{\max} \cdot F^*(m-1, \vartheta). \quad (26)$$

Der relative Fehler wird also maximal:

$$\Delta F^*/F^* = m \cdot \Delta_{\max} \cdot F^*(m-1, \vartheta)/F^*(m, \vartheta). \quad (27)$$

Für $m=20$ und $\vartheta=0$ erhält man einen Fehler von höchstens 4%.

Bei $\vartheta=0$ läßt sich (16) leicht numerisch integrieren. Der auf diese Weise ermittelte genaue Wert liegt bei $m=20$ 3,2% unter dem nach (22) berechneten Näherungswert.

2.3. Die integrierten Winkelverteilungen

In vielen Fällen, z. B. zur Interpretation der Kontraste auf elektronenmikroskopischen Aufnahmen, interessiert die über ϑ integrierte Winkelverteilung. Integriert man (22) von ϑ bis ∞ , ändert sich lediglich der Exponent des Winkelausdrucks von $-3/2$ in $-1/2$. Daher läßt sich der Anteil der gestreuten Teilchen mit Streuwinkeln $x > \vartheta$

$$\hat{G}^*(m, \vartheta) = \int_\vartheta^\infty G^*(m, x) x dx \quad (28)$$

ohne Verdopplung des Rechenaufwands zusammen mit der Winkelverteilung (22) berechnen.

2.4. Gemittelte Winkelverteilungen

Untersucht man andere in der Schicht stattfindende Elementarprozesse, bei denen die Winkelstreuung der Partikel stört, so interessieren für Streukorrekturen die über die Schichtdicke gemittelten Winkelverteilungen:

$$\bar{G}^*(m, \vartheta) = \frac{1}{m} \int_0^m G^*(z, \vartheta) dz. \quad (29)$$

Sie wurden aus den Winkelverteilungen (22) durch graphische Integration ermittelt.

Der in die Streukorrekturen ebenfalls eingehende Anteil der über die Schichtdicke gemittelten ungestreuten Teilchen ergibt sich leicht zu

$$e^{-m} \delta_2(\vartheta) = \frac{1}{m} (1 - e^{-m}) \delta_2(\vartheta). \quad (30)$$

3. Ergebnisse

In Tab. 1 ist die Winkelverteilung $G^*(m, \vartheta)$ für Stoßzahlen zwischen 0,2 und 20 und reduzierte Winkel zwischen 0 und 20 zusammengestellt. Die Stoßzahlen sind so eng gewählt, daß die Ermittlung einer Winkelverteilung für beliebige Stoßzahlen durch Interpolation leicht möglich ist. Durch diese Darstellungsweise soll der Nachteil der in der Literatur üblichen Auftragung über dem Winkel mit m als Parameter vermieden werden.

Tab. 2 enthält die integrierten Winkelverteilungen $\hat{G}^*(m, \vartheta)$. Der dazu komplementäre Bruchteil der in die Apertur fallenden Teilchen ergibt sich aus der Normierung.

In Tab. 3 sind die über die Schichtdicke gemittelten Winkelverteilungen $\bar{G}^*(m, \vartheta)$ angegeben.

4. Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren

Zum direkten Vergleich unserer Ergebnisse mit früheren Arbeiten kommen nur die von LEISEGANG⁵ bis zur mittleren Stoßzahl 8 nach derselben Methode berechneten Verteilungen in Frage. Die Konstanten der Approximation (18) wurden von LEISEGANG so bestimmt, daß der Fehler der Approximation 2% nicht überschritt. Für eine numerische Auswertung bis $m=8$ wäre diese Genauigkeit ausreichend gewesen. LEISEGANG hat jedoch bei seiner Auswertung das

$\vartheta \backslash m$	0.2	0.4	0.6	1	2	3	4
0.0	.338/-0	.572/-0	.725/-0	.8808/-0	.8137/-0	.5945/-0	.4114/-0
0.1	.336/-0	.569/-0	.721/-0	.8658/-0	.8020/-0	.5875/-0	.4076/-0
0.2	.313/-0	.531/-0	.673/-0	.8233/-0	.7685/-0	.5675/-0	.3969/-0
0.4	.253/-0	.431/-0	.549/-0	.6833/-0	.6573/-0	.5004/-0	.3601/-0
0.6	.186/-0	.319/-0	.414/-0	.5229/-0	.5270/-0	.4196/-0	.3147/-0
0.8	.129/-0	.224/-0	.294/-0	.3834/-0	.4096/-0	.3441/-0	.2703/-0
1.0	.883/-1	.155/-0	.207/-0	.2770/-0	.3158/-0	.2806/-0	.2311/-0
1.25	.550/-1	.995/-1	.134/-0	.1853/-0	.2293/-0	.2181/-0	.1900/-0
1.5	.348/-1	.655/-1	.905/-1	.1262/-0	.1688/-0	.1709/-0	.1566/-0
2.0	.152/-1	.288/-1	.415/-1	.6276/-1	.9574/-1	.1076/-0	.1073/-0
2.5	.741/-2	.147/-1	.215/-1	.3402/-1	.5720/-1	.6976/-1	.7449/-1
3.0	.396/-2	.800/-2	.120/-1	.1975/-1	.3567/-1	.4634/-1	.5229/-1
4.0	.139/-2	.285/-2	.442/-2	.7733/-2	.1531/-1	.2176/-1	.2667/-1
6.0	.291/-3	.605/-3	.950/-3	.1737/-2	.3745/-2	.5848/-2	.7894/-2
8.0	.948/-4	.195/-3	.300/-3	.5359/-3	.1187/-2	.1927/-2	.2723/-2
10	.381/-4	.780/-4	.117/-3	.2040/-3	.4531/-3	.7444/-3	.1072/-2
15	—	—	—	.3273/-4	.7099/-4	.1152/-3	.1656/-3
20	—	—	—	.8744/-5	.1851/-4	.2938/-4	.4146/-4

$\vartheta \backslash m$	5	6	7	8	9	10	11
0.0	.2866/-0	.2062/-0	.1547/-0	.1210/-0	.9806/-1	.8188/-1	.7001/-1
0.1	.2846/-0	.2052/-0	.1542/-0	.1207/-0	.9791/-1	.8179/-1	.6995/-1
0.2	.2791/-0	.2024/-0	.1527/-0	.1199/-0	.9746/-1	.8152/-1	.6978/-1
0.4	.2597/-0	.1923/-0	.1474/-0	.1170/-0	.9577/-1	.8049/-1	.6911/-1
0.6	.2351/-0	.1790/-0	.1400/-0	.1128/-0	.9328/-1	.7892/-1	.6806/-1
0.8	.2099/-0	.1647/-0	.1318/-0	.1079/-0	.9022/-1	.7692/-1	.6670/-1
1.0	.1864/-0	.1506/-0	.1233/-0	.1025/-0	.8675/-1	.7459/-1	.6506/-1
1.25	.1602/-0	.1340/-0	.1126/-0	.9554/-1	.8203/-1	.7130/-1	.6269/-1
1.5	.1374/-0	.1187/-0	.1023/-0	.8844/-1	.7705/-1	.6771/-1	.6005/-1
2.0	.1010/-0	.9229/-1	.8316/-1	.7456/-1	.6683/-1	.6008/-1	.5423/-1
2.5	.7423/-1	.7116/-1	.6673/-1	.6183/-1	.5694/-1	.5234/-1	.4812/-1
3.0	.5467/-1	.5462/-1	.5307/-1	.5067/-1	.4787/-1	.4495/-1	.4208/-1
4.0	.3006/-1	.3211/-1	.3310/-1	.3329/-1	.3291/-1	.3215/-1	.3115/-1
6.0	.9774/-2	.1142/-1	.1279/-1	.1390/-1	.1475/-1	.1536/-1	.1578/-1
8.0	.3543/-2	.4357/-2	.5138/-2	.5869/-2	.6537/-2	.7132/-2	.7652/-2
10	.1429/-2	.1806/-2	.2195/-2	.2587/-2	.2974/-2	.3349/-2	.3708/-2
15	.2225/-3	.2856/-3	.3550/-3	.4303/-3	.5109/-3	.5964/-3	.6860/-3
20	.5484/-4	.6958/-4	.8577/-4	.1034/-3	.1227/-3	.1434/-3	.1658/-3

$\vartheta \backslash m$	12	13	14	15	16	18	20
0.0	.6098/-1	.5392/-1	.4825/-1	.4360/-1	.3973/-1	.3365/-1	.2911/-1
0.1	.6094/-1	.5389/-1	.4822/-1	.4358/-1	.3971/-1	.3364/-1	.2911/-1
0.2	.6082/-1	.5380/-1	.4816/-1	.4353/-1	.3967/-1	.3362/-1	.2909/-1
0.4	.6037/-1	.5347/-1	.4791/-1	.4334/-1	.3952/-1	.3351/-1	.2901/-1
0.6	.5963/-1	.5294/-1	.4750/-1	.4302/-1	.3926/-1	.3334/-1	.2888/-1
0.8	.5866/-1	.5221/-1	.4695/-1	.4258/-1	.3891/-1	.3309/-1	.2871/-1
1.0	.5746/-1	.5131/-1	.4625/-1	.4203/-1	.3847/-1	.3279/-1	.2849/-1
1.25	.5571/-1	.4998/-1	.4521/-1	.4120/-1	.3779/-1	.3232/-1	.2814/-1
1.5	.5371/-1	.4843/-1	.4399/-1	.4022/-1	.3698/-1	.3176/-1	.2773/-1
2.0	.4920/-1	.4487/-1	.4113/-1	.3789/-1	.3506/-1	.3039/-1	.2673/-1
2.5	.4432/-1	.4071/-1	.3789/-1	.3520/-1	.3281/-1	.2787/-1	.2551/-1
3.0	.3935/-1	.3680/-1	.3445/-1	.3231/-1	.3030/-1	.2695/-1	.2412/-1
4.0	.3001/-1	.2880/-1	.2757/-1	.2636/-1	.2519/-1	.2300/-1	.2104/-1
6.0	.1602/-1	.1612/-1	.1611/-1	.1600/-1	.1583/-1	.1533/-1	.1473/-1
8.0	.8097/-2	.8470/-2	.8775/-2	.9018/-2	.9204/-2	.9432/-2	.9506/-2
10	.4045/-2	.4359/-2	.4647/-2	.4908/-2	.5142/-2	.5532/-2	.5824/-2
15	.7791/-3	.8748/-3	.9725/-3	.1071/-2	.1171/-2	.1368/-2	.1559/-2
20	.1896/-3	.2150/-3	.2418/-3	.2701/-3	.2996/-3	.3622/-3	.4289/-3

Tab. 1 *. Winkelverteilung $G^*(m, \vartheta)$.* Für alle Tabellen wurde folgende Zahlendarstellung gewählt: .338/-1 bedeutet $.338 \cdot 10^{-1}$. ϑ ist der reduzierte Winkel θ/θ_α .

$\vartheta \backslash m$	1	2	3	4	5	6
0.0	.6321/-0	.8647/-0	.9502/-0	.9817/-0	.9933/-0	.9975/-0
0.1	.6278/-0	.8606/-0	.9473/-0	.9796/-0	.9918/-0	.9965/-0
0.2	.6151/-0	.8488/-0	.9386/-0	.9736/-0	.9876/-0	.9934/-0
0.4	.5701/-0	.8062/-0	.9067/-0	.9509/-0	.9715/-0	.9816/-0
0.6	.5104/-0	.7475/-0	.8609/-0	.9192/-0	.9468/-0	.9631/-0
0.8	.4478/-0	.6825/-0	.8078/-0	.8766/-0	.9157/-0	.9391/-0
1.0	.3892/-0	.6179/-0	.7520/-0	.8317/-0	.8802/-0	.9107/-0
1.25	.3256/-0	.5424/-0	.6826/-0	.7723/-0	.8317/-0	.8708/-0
1.5	.2731/-0	.4749/-0	.6163/-0	.7137/-0	.7807/-0	.8275/-0
2.0	.1956/-0	.3642/-0	.4982/-0	.6007/-0	.6780/-0	.7361/-0
2.5	.1437/-0	.2812/-0	.4010/-0	.5003/-0	.5808/-0	.6451/-0
3.0	.1080/-0	.2191/-0	.3229/-0	.4146/-0	.4932/-0	.5595/-0
4.0	.6483/-1	.1374/-0	.2118/-0	.2840/-0	.3515/-0	.4130/-0
6.0	.2786/-1	.6098/-1	.9812/-1	.1379/-0	.1791/-0	.2206/-0
8.0	.1424/-1	.3118/-1	.5065/-1	.7236/-1	.5959/-1	.1210/-0
10	.8252/-2	.1788/-1	.2892/-1	.4134/-1	.5508/-1	.7004/-1
15	.3031/-2	.6378/-2	.1006/-1	.1411/-1	.1855/-1	.2338/-1
20	.1538/-2	.3172/-2	.4909/-2	.6758/-2	.8726/-2	.1082/-1

$\vartheta \backslash m$	7	8	9	10	11	12
0.0	.9991/-0	.9997/-0	.9999/-0	.1000/+1	.1000/+1	.1000/+1
0.1	.9983/-0	.9991/-0	.9994/-0	.9995/-0	.9996/-0	.9997/-0
0.2	.9960/-0	.9973/-0	.9979/-0	.9983/-0	.9986/-0	.9988/-0
0.4	.9870/-0	.9902/-0	.9921/-0	.9935/-0	.9944/-0	.9951/-0
0.6	.9727/-0	.9787/-0	.9827/-0	.9855/-0	.9876/-0	.9891/-0
0.8	.9536/-0	.9632/-0	.9698/-0	.9746/-0	.9781/-0	.9809/-0
1.0	.9307/-0	.9443/-0	.9539/-0	.9609/-0	.9663/-0	.9704/-0
1.25	.8976/-0	.9165/-0	.9302/-0	.9404/-0	.9483/-0	.9545/-0
1.5	.8607/-0	.8849/-0	.9029/-0	.9166/-0	.9272/-0	.9357/-0
2.0	.7802/-0	.8139/-0	.8401/-0	.8608/-0	.8773/-0	.8907/-0
2.5	.6965/-0	.7376/-0	.7708/-0	.7977/-0	.8199/-0	.8382/-0
3.0	.6147/-0	.6607/-0	.6990/-0	.7311/-0	.7580/-0	.7808/-0
4.0	.4682/-0	.5171/-0	.5602/-0	.5980/-0	.6313/-0	.6605/-0
6.0	.2615/-0	.3012/-0	.3392/-0	.3752/-0	.4090/-0	.4407/-0
8.0	.1471/-0	.1737/-0	.2007/-0	.2277/-0	.2543/-0	.2804/-0
10	.8607/-1	.1030/-0	.1207/-0	.1390/-0	.1577/-0	.1767/-0
15	.2863/-1	.3429/-1	.4037/-1	.4686/-1	.5374/-1	.6101/-1
20	.1305/-1	.1542/-1	.1795/-1	.2062/-1	.2345/-1	.2645/-1

$\vartheta \backslash m$	13	14	15	16	18	20
0.0	.1000/+1	.1000/+1	.1000/+1	.1000/+1	.1000/+1	.9999/-0
0.1	.9997/-0	.9997/-0	.9998/-0	.9998/-0	.9998/-0	.9998/-0
0.2	.9989/-0	.9990/-0	.9991/-0	.9992/-0	.9993/-0	.9993/-0
0.4	.9957/-0	.9961/-0	.9965/-0	.9968/-0	.9973/-0	.9976/-0
0.6	.9904/-0	.9914/-0	.9922/-0	.9929/-0	.9939/-0	.9947/-0
0.8	.9830/-0	.9848/-0	.9862/-0	.9874/-0	.9893/-0	.9907/-0
1.0	.9737/-0	.9764/-0	.9786/-0	.9804/-0	.9834/-0	.9855/-0
1.25	.9595/-0	.9635/-0	.9669/-0	.9697/-0	.9742/-0	.9779/-0
1.5	.9425/-0	.9482/-0	.9529/-0	.9569/-0	.9632/-0	.9680/-0
2.0	.9018/-0	.9110/-0	.9187/-0	.9254/-0	.9360/-0	.9441/-0
2.5	.8536/-0	.8666/-0	.8776/-0	.8872/-0	.9027/-0	.9148/-0
3.0	.8002/-0	.8169/-0	.8313/-0	.8438/-0	.8645/-0	.8806/-0
4.0	.6863/-0	.7090/-0	.7291/-0	.7470/-0	.7773/-0	.8018/-0
6.0	.4703/-0	.4978/-0	.5233/-0	.5469/-0	.5892/-0	.6254/-0
8.0	.3059/-0	.3306/-0	.3544/-0	.3773/-0	.4202/-0	.4593/-0
10	.1958/-0	.2149/-0	.2339/-0	.2528/-0	.2895/-0	.3248/-0
15	.6865/-1	.7663/-1	.8492/-1	.9351/-1	.1114/-0	.1302/-0
20	.2961/-1	.3294/-1	.3644/-1	.4011/-1	.4795/-1	.5643/-1

Tab. 2. Integrierte Winkelverteilung $\hat{G}^*(m, \vartheta)$.

$\vartheta \backslash m$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0
0.1	.167/-1	.317/-1	.428/-1	.514/-1	.579/-1	.720/-1
0.2	.333/-1	.602/-1	.804/-1	.966/-1	.109/-0	.137/-0
0.4	.565/-1	.984/-1	.132/-0	.158/-0	.179/-0	.227/-0
0.6	.610/-1	.108/-0	.146/-0	.180/-0	.204/-0	.264/-0
0.8	.550/-1	.100/-0	.136/-0	.167/-0	.192/-0	.260/-0
1.0	.433/-1	.834/-1	.117/-0	.145/-0	.169/-0	.237/-0
1.5	.280/-1	.512/-1	.729/-1	.928/-1	.110/-0	.170/-0
2.0	.150/-1	.300/-1	.439/-1	.567/-1	.688/-1	.116/-0
2.5	.870/-2	.184/-1	.278/-1	.368/-1	.451/-1	.809/-1
3.0	.570/-2	.117/-1	.178/-1	.239/-1	.298/-1	.569/-1
4.0	.320/-2	.650/-2	.976/-2	.130/-1	.162/-1	.312/-1
6.0					.513/-2	.108/-1
8.0					.200/-2	.442/-2
10					.100/-2	.212/-2
15					.163/-3	.396/-3
20					.873/-4	.178/-3

$\vartheta \backslash m$	3	4	5	6	7	8
0.1	.713/-1	.657/-1	.594/-1	.535/-1	.484/-1	.441/-1
0.2	.136/-0	.126/-0	.114/-0	.103/-0	.932/-1	.849/-1
0.4	.229/-0	.214/-0	.196/-0	.178/-0	.162/-0	.149/-0
0.6	.271/-0	.258/-0	.239/-0	.220/-0	.202/-0	.186/-0
0.8	.275/-0	.267/-0	.252/-0	.235/-0	.218/-0	.203/-0
1.0	.259/-0	.258/-0	.248/-0	.234/-0	.220/-0	.207/-0
1.5	.199/-0	.211/-0	.213/-0	.209/-0	.203/-0	.196/-0
2.0	.146/-0	.164/-0	.173/-0	.176/-0	.176/-0	.174/-0
2.5	.107/-0	.126/-0	.138/-0	.145/-0	.149/-0	.151/-0
3.0	.793/-1	.968/-1	.110/-0	.119/-0	.125/-0	.129/-0
4.0	.456/-1	.586/-1	.697/-1	.789/-1	.863/-1	.921/-1
6.0	.168/-1	.229/-1	.289/-1	.346/-1	.401/-1	.452/-1
8.0	.707/-2	.995/-2	.130/-1	.161/-1	.192/-1	.223/-1
10	.340/-2	.481/-2	.635/-2	.798/-2	.950/-2	.113/-1
15	.720/-3	.107/-2	.143/-2	.183/-2	.225/-2	.271/-2
20	.278/-3	.385/-3	.500/-3	.624/-3	.756/-3	.898/-3

$\vartheta \backslash m$	9	10	12	16	20	
0.1	.404/-1	.373/-1	.323/-1	.255/-1	.211/-1	
0.2	.779/-1	.719/-1	.623/-1	.492/-1	.408/-1	
0.4	.137/-0	.127/-0	.110/-0	.877/-1	.729/-1	
0.6	.172/-0	.160/-0	.140/-0	.113/-0	.943/-1	
0.8	.189/-0	.177/-0	.156/-0	.127/-0	.107/-0	
1.0	.194/-0	.183/-0	.164/-0	.135/-0	.114/-0	
1.5	.188/-0	.180/-0	.165/-0	.141/-0	.124/-0	
2.0	.170/-0	.166/-0	.156/-0	.138/-0	.123/-0	
2.5	.150/-0	.149/-0	.144/-0	.132/-0	.120/-0	
3.0	.131/-0	.132/-0	.131/-0	.124/-0	.116/-0	
4.0	.966/-1	.999/-1	.104/-0	.106/-0	.103/-0	
6.0	.497/-1	.538/-1	.605/-1	.693/-1	.737/-1	
8.0	.254/-1	.283/-1	.337/-1	.426/-1	.490/-1	
10	.131/-1	.151/-1	.188/-1	.256/-1	.314/-1	
15	.319/-2	.370/-2	.481/-2	.726/-2	.991/-2	
20	.105/-2	.121/-2	.156/-2	.240/-2	.337/-2	

Tab. 3. Gemittelte Winkelverteilung $\bar{G}^*(m, \vartheta) \vartheta$.

dritte Glied der Summe (18) vernachlässigt, da die Berechnung der Doppelsumme (22) ohne eine elektronische Rechenmaschine zu aufwendig gewesen wäre. Der Vergleich mit unseren Ergebnissen zeigt, daß die von LEISEGANG berechneten Winkelverteilungen bis etwa $m=4$ brauchbar sind, für größere mittlere Stoßzahlen jedoch erheblich von unseren Werten abweichen.

Bei $m=20$ ist ein Vergleich unseres Ergebnisses mit der MOLIÈRESchen Vielfachstreuformel möglich, die dort noch auf etwa 1% genau sein soll. Dabei ist zu beachten, daß der reduzierte Winkel ω bei MOLIÈRE mit dem hier eingeführten in folgendem Zusammenhang steht:

$$\omega = \sqrt{m B} \cdot \vartheta. \quad (31)$$

B ist die von MOLIÈRE eingeführte Schichtdickengröße, die für $m=20$ den Wert 4,300 annimmt. Der Vergleich der MOLIÈRESchen Verteilung $F_M(B, \omega)$ mit $F^*(m, \vartheta)$ für $m=20$ ist in Abb. 1 dargestellt. Der maximale Unterschied liegt bei $\vartheta=0$, wo unser Wert etwa 7,5% über dem von MOLIÈRE liegt. Mit zunehmendem Winkel werden die Unterschiede kleiner. Da bei $\vartheta=0$ der genaue Wert der Verteilung durch numerische Integration ermittelt werden kann, läßt sich dort die Genauigkeit beider Approximationen vergleichen. Danach ist unser Wert um 3,2% zu groß, der von MOLIÈRE um 4,3% zu klein; beide Approximationen sind also etwa gleich genau. Mit zunehmender mittlerer Stoßzahl wird die MOLIÈRE-

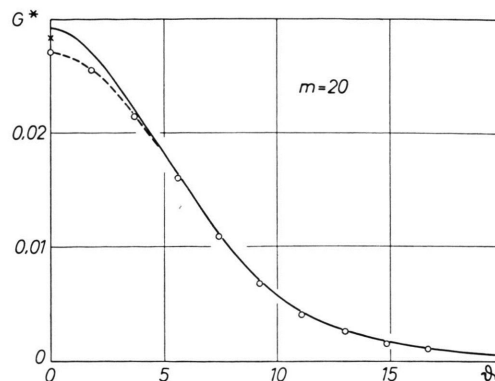


Abb. 1. Vergleich der nach (22) berechneten Winkelverteilung mit der Streuformel von MOLIÈRE bei der mittleren Stoßzahl $m=20$. — unser Ergebnis, --○-- MOLIÈRE, × genauer Wert bei $m=20$ und $\vartheta=0$.

sche Approximation, mit abnehmender unsere besser. In diesem Sinne kann man die Übereinstimmung als zufriedenstellend bezeichnen, so daß nun die Winkelverteilungen im Rahmen der in den Ansätzen enthaltenen physikalischen Einschränkungen für alle mittleren Stoßzahlen quantitativ vorliegen.

Wir danken Herrn Prof. Dr. H. KULENKAMPFF für die Möglichkeit, diese Arbeit durchzuführen, Herrn Prof. Dr. A. WALTHER für die Bereitstellung von Rechenzeit auf der elektronischen Rechanlage seines Instituts, Herrn Priv.-Doz. Dr. F. LENZ für die Überlassung seines Zahlenmaterials und dem Bundesministerium für Atomkernenergie und Wasserwirtschaft für finanzielle Unterstützung.